TECHNIQUES & MÉTHODES S11

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales** ; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

LIMITE D'UNE FONCTION

▪▪▪ Étudier l'existence de la limite d'une fonction

Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

Comment montrer que f ne possède pas de limite en a

J'utilise la **caractérisation séquentielle de la limite** (sens élève). Il suffit d'exhiber :

- une suite $u = (u_n) \in I^{\mathbf{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $(f(u_n))$ est divergente ; ou bien
- deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_n u_n = \lim\limits_n v_n = a$ et $\lim\limits_n f(u_n) \neq \lim\limits_n f(v_n)$.

Comment montrer que f admet une limite en a

Il y a trois pistes possibles. J'utilise au choix :

- le **théorème de la limite monotone** ;
- les théorèmes de comparaison ;
- les opérations *i.e.* opérations algébriques et composition.

▪▪▪ Étudier l'existence et calculer la valeur d'une limite par opérations

Comment se ramener au voisinage de 0

Tout d'abord, pour étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers a, il est souvent préférable de se ramener au voisinage de 0, par exemple pour utiliser les équivalents usuels, en effectuant le changement de variable (et donc aussi de fonction) adéquat : $\left\Vert \begin{array}{ll} x = a + t \text{ et } g(t) = f(a+t) & \text{si } a \in \bar{I} \\ x = 1/t \text{ et } g(t) = f(1/t) & \text{si } a = \pm\infty \end{array}\right.$. En ce cas, on se ramène à l'étude de g en 0 (ou en $0^{\pm}$ si $a = \pm\infty$) car

$$(\forall \ell \in \bar{\mathbf{R}}), \quad \left(\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{t\to 0} g(t) = \ell\right)$$

D'autre part, s'il s'agit d'une fonction usuelle, il n'y a pas de problème puisque je connais parfaitement les limites des fonctions usuelles ! Sinon, f est construite à partir de telles fonctions par composition et opérations algébriques :

Comment étudier une limite par changement de variable

Si f est une *composée* de fonctions usuelles, $f(x) = g \circ y(x)$. J'effectue le changement de variable $y = y(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to a} y(x) = b \\ \bullet \ \lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} g \circ y(x) = \ell$$

Ainsi, je calcule $b = \lim\limits_{x\to a} y(x)$, puis $\ell = \lim\limits_{y\to b} g(y)$ et conclus par composition que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Comment étudier une limite par OPA

Lorsque f est construite à partir de fonctions usuelles par opérations algébriques, vous pouvez appliquer le théorème OPA. La méthode est particulièrement simple : *s'il n'y a pas d'indétermination*, la limite de f est obtenue par ces mêmes opérations algébriques sur des limites. Toutefois, il est fort probable (! !) qu'apparaisse lors du calcul une **forme indéterminée**, c'est-à-dire une expression de la forme : $+\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $0 \times \infty$, 1^{∞}, 0^0. Par exemple si $\lim_a u(x) = 0$ et $\lim_a v(x) = +\infty$, le théorème OPA ne permet pas de prévoir la limite du produit $u(x)v(x)$: tout dépend de la *vitesse* avec laquelle $u(x)$ et $v(x)$ tendent vers leurs limites respectives.

Comment étudier et calculer une limite par équivalent

En cas d'indétermination, on peut parfois lever l'indétermination en simplifiant l'expression de f à l'aide d'opérations algébriques, par exemple en multipliant une fraction par l'expression conjuguée du dénominateur. Mais en règle générale, on procède par équivalent. Le calcul des limites *via* les équivalents permet de prouver *à la fois* l'**existence** et la **valeur** de la limite. En effet si $f(x) \sim_a g(x)$ alors :

$$(\forall \ell \in \bar{\mathbf{R}}), \quad \left(\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to a} g(x) = \ell\right).$$

En pratique, la méthode est en deux temps :

$\boxed{1}$ je détermine un équivalent le plus simple possible de la fonction.

$\boxed{2}$ $f(x)$ et $g(x)$ ont même comportement. Pour déterminer le comportement de son équivalent, j'utilise les limites des fonctions usuelles et les relations de comparaisons entre ces fonctions usuelles.